Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Electrónica y Circuitos.
EC1421 – Sept-Dic. 2015.

Taller3

SEÑALES ALEATORIAS Y RUIDO

Problema 3.1 El proceso aleatorio WSS $X(t)$ tiene función de densidad probabilística (fdp) uniforme, con media $E[x(t)] = 1$, desviación estándar igual $\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y función de la densidad espectral de potencia (DEP) $S_x(\omega)$.

a) Especifique los límites para los cuales está definido el proceso aleatorio $X(t)$.

En una función de densidad probabilística constante, tenemos que el valor esperado y la varianza pueden ser calculados en base a $E[x(t)] = \frac{a+b}{2}, {\sigma_x}^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$. Donde a, b representan los límites para los cuales está definido el proceso aleatorio $X(t)$.

$$1 = \frac{a+b}{2}, \qquad \frac{1}{3} = \frac{b-a}{144}$$

Por lo que $a = 0, y \;\; b = 2$.

b) Determine la función de DEP de $Y(t) = X(t) - X(t - T_0)$ en función de la DEP de $X(t)$, realizando el análisis estadístico.

$$S_{yy}(\omega) = F\{R_{yy}(\tau)\}$$

$$R_{yy}(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\left[\left(X(t) - X(t-T_0)\right)\left(X(t+\tau) - X(t+\tau-T_0)\right)\right]$$

$$E[Y(t)Y(t+\tau)] \\ = E[X(t)X(t+\tau) - X(t)X(t+\tau-T_0) - X(t-T_0)X(t+\tau) + X(t-T_0)X(t+\tau-T_0)]$$

$$E[Y(t)Y(t+\tau)] \\ = E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)X(t+\tau-T_0)] - E[X(t-T_0)X(t+\tau)] \\ + E[X(t-T_0)X(t-T_0+\tau)]$$

$$E[Y(t)Y(t+\tau)] = R_{XX}(\tau) - E[X(t)X(t+\tau-T_0)] - E[X(t-T_0)X(t+\tau)] + R_{XX}(\tau)$$

$$E[Y(t)Y(t+\tau)] = 2R_{XX}(\tau) - R_{XX}(\tau+T_0) - R_{XX}(\tau-T_0)$$

Si aplicamos transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación obtendremos:

$$S_{yy}(\omega) = 2S_{XX}(\omega) - e^{j\omega T_0}S_{XX}(\omega) - e^{-j\omega T_0}S_{XX}(\omega)$$

$$S_{yy}(\omega) = 2S_{XX}(\omega) - 2S_{XX}(\omega)cos(\omega T_0)$$

$$S_{yy}(\omega) = 2S_{XX}(\omega)[1 - cos(\omega T_0)]$$

c) Determine la función de DEP de $Y(t) = X(t) - X(t - T_0)$ en función de la DEP de $X(t)$, realizando el análisis frecuencial.

Si analizamos el P.A. $Y(t)$ como la salida o respuesta de un sistema LIT, podríamos plantear que $S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{XX}(\omega)$.

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{F\{X(t) - X(t - T_0)\}}{X(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)\left(1 - e^{-j\omega T_0}\right)}{X(j\omega)}$$

$$H(j\omega) = \left(1 - e^{-j\omega T_0}\right)$$

$$|H(j\omega)|^2 = \left(1 - cos(\omega T_0)\right)^2 + \left(sen(\omega T_0)\right)^2$$

$$|H(j\omega)|^2 = 1 - 2cos(\omega T_0) + cos^2(\omega T_0) + sen^2(\omega T_0)$$

$$|H(j\omega)|^2 = 2 - 2cos(\omega T_0)$$

$$S_{yy}(\omega) = 2S_{XX}(\omega)[1 - cos(\omega T_0)]$$

d) Calcule la potencia promedio total de $Y(t)$, asuma que T_0=0,5seg , $R_x(0) = 1,\ R_x(0{,}5) = 0{,}25$.

P total de $Y(t) = R_{yy}(0)$

$$R_{yy}(0) = 2R_{XX}(0) - R_{XX}(0 + 0{,}5) - R_{XX}(0 - 0{,}5)$$
$$R_{yy}(0) = 2R_{XX}(0) - R_{XX}(0{,}5) - R_{XX}(-0{,}5)$$
$$R_{yy}(0) = 2 - 0{,}25 - 0{,}25$$
$$R_{yy}(0) = 1{,}5\ watts$$

Problema 3.2 Un proceso estocástico definido por $X(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsen(\omega_0 t)$ donde A y B representan dos variables aleatorias estadísticamente independientes, ambas con función de densidad probabilística uniformemente distribuida entre $\{-1{:}\,1\}$.

a) Calcule la media temporal y la media estadística del proceso.

Media temporal de $X(t) = \langle X(t)\rangle$

$$\langle X(t)\rangle = \frac{1}{T_c}\int_{-T_c/2}^{T_c/2} Acos(\omega_c t) + Bsen(\omega_c t)dt$$

$$\langle X(t)\rangle = \frac{1}{T_c}\left[\int_{-T_c/2}^{T_c/2} Acos(\omega_c t)dt + \int_{-T_c/2}^{T_c/2} Bsen(\omega_c t)dt\right]$$

La media temporal del P.A. $\langle X(t)\rangle = 0$

Media Estadística de $X(t) = E[X(t)]$

$$E[X(t)] = E[Acos(\omega_c t) + Bsen(\omega_c t)]$$
$$E[X(t)] = E[Acos(\omega_c t)] + E[Bsen(\omega_c t)]$$
$$E[X(t)] = E[A]cos(\omega_c t) + E[B]sen(\omega_c t)$$

La media estadística del P.A. $E[X(t)] = 0$

b) Calcule la autocorrelación temporal y la autocorrelación estadística del proceso.

Autocorrelación Temporal:

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{1}{T_c}\int_{-T_c/2}^{T_c/2} X(t)X(t+\tau)dt$$

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{1}{T_c}\int_{-T_c/2}^{T_c/2} \big(Acos(\omega_c t) + Bsen(\omega_c t)\big)\big(Acos(\omega_c(t+\tau)) + Bsen(\omega_c(t+\tau))\big)dt$$

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{1}{T_c}\int_{-T_c/2}^{T_c/2} \frac{A^2}{2}\big(cos(\omega_c\tau) + cos(\omega_c(2t+\tau))\big) + \frac{B^2}{2}\big(cos(\omega_c\tau) - cos(\omega_c(2t+\tau))\big) + ABsen(\omega_c(2t+\tau))dt$$

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{1}{T_c}\int_{-T_c/2}^{T_c/2} \left(\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right)cos(\omega_c\tau) + \left(\frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2}\right)cos(\omega_c(2t+\tau)) + ABsen(\omega_c(2t+\tau))dt$$

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{1}{T_c}\left[\left(\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right)cos(\omega_c\tau)t + \left(\frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2}\right)\frac{1}{2\omega_c}sen(\omega_c(2t+\tau)) - \frac{AB}{2\omega_c}cos(\omega_c(2t+\tau))\right]\Bigg|_{\frac{-T_c}{2}}^{\frac{T_c}{2}}$$

$$R_x(t,t+\tau) = \frac{1}{T_c}\left[T_c\left(\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right)cos(\omega_c\tau)\right]$$

$$R_x(t,t+\tau) = \left(\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right)cos(\omega_c\tau)$$

Autocorrelación Estadística:

$$R_x(t,t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$
$$R_x(t,t+\tau) = E\big[\big(Acos(\omega_c t) + Bsen(\omega_c t)\big)\big(Acos(\omega_c(t+\tau)) + Bsen(\omega_c(t+\tau))\big)\big]$$
$$R_x(t,t+\tau) = E[Acos(\omega_c t)Acos(\omega_c(t+\tau)) + Bsen(\omega_c t)Bsen(\omega_c(t+\tau)) + ABcos(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau)) + ABcos(\omega_c(t+\tau))sen(\omega_c t)]$$
$$R_x(t,t+\tau) = E[Acos(\omega_c t)Acos(\omega_c(t+\tau))] + E[Bsen(\omega_c t)Bsen(\omega_c(t+\tau))] + E[ABcos(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau))] + E[ABcos(\omega_c(t+\tau))sen(\omega_c t)]$$

Dado que las variables aleatorias *A*, *B* son estadísticamente independientes $E[AB] = E[A]E[B]$.

$$R_x(t,t+\tau) = E[A^2]cos(\omega_c t)cos(\omega_c(t+\tau)) + E[B^2]sen(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau)) + E[A]E[B]cos(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau)) + E[A]E[B]cos(\omega_c(t+\tau))sen(\omega_c t)$$

Dado que los valores esperados de las variables aleatorias $E[A] = E[B]$=0.

$$R_x(t,t+\tau) = E[A^2]cos(\omega_c t)cos(\omega_c(t+\tau)) + E[B^2]sen(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau))$$

Dado que las variables aleatorias *A*, *B* tienen igual varianza ${\sigma_A}^2 = {\sigma_B}^2 = \sigma^2$

$$R_x(t, t+\tau) = \sigma^2 cos(\omega_c \tau)$$

c) Analice los resultados obtenidos en (a), (b) y diga que se puede concluir acerca de la Ergodicidad y la Estacionaridad de dicho proceso.

El proceso aleatorio es WSS, ya que $E[X(t)] = 0$, $R_x(t, t+\tau) = \sigma^2 cos(\omega_c \tau)$. Sin embargo, el proceso aleatorio no es Ergódico ya que las funciones de autocorrelación temporal y estadística no son iguales.

<u>Problema 3.3</u> Dada la señal determinística $f(t)$, con función de densidad espectral de potencia:

$$S_f(\omega) = \left[\frac{1}{1+\omega^2} + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

a) Realizando el análisis temporal, encuentre una expresión para la señal *f(t)*, en términos de cosenos y exponenciales que satisfaga la función de densidad espectral de potencia $S_f(\omega)$.

Aquí podemos plantear que $S_f(\omega) = S_{f_1}(\omega) + S_{f_2}(\omega)$

$$R_f(\tau) = F^{-1}\{S_f(\omega)\}$$

$$R_f(\tau) = F^{-1}\{S_{f_1}(\omega) + S_{f_2}(\omega)\}$$

$$R_f(\tau) = R_{f_1}(\tau) + R_{f_2}(\tau)$$

$$R_f(\tau) = F^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\} + F^{-1}\left\{\pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$R_f(\tau) = \frac{1}{2}e^{-|\tau|} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$$

Para una señal determinística $f(t)$, la función de autocorrelación se calcula de forma temporal:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt$$

Se puede demostrar la correspondencia entre las siguientes señales determinística y sus funciones de autocorrelación:

$f_1(t) = \sqrt{2\pi}e^{-t}u(t)$ tiene función de autocorrelación $R_{f_1}(\tau) = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$

$f_2(t) = \sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ tiene función de autocorrelación $R_{f_2}(\tau) = cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$

Por lo que $f(t) = \sqrt{2\pi}e^{-t}u(t) + \sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

b) Realizando el análisis frecuencial, encuentre una expresión para la señal *f(t)*, en términos de cosenos y exponenciales que satisfaga la función de densidad espectral de potencia $S_f(\omega)$.

La función de densidad espectral de potencia de una señal determinística puede ser calculada como $S_f(\omega) = \frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi}$.

$$\frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi} = \left[\frac{1}{1+\omega^2} + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Tomando en cuenta que $|a+b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2$

$$|F(j\omega)|^2 = 2\pi\left[\frac{1}{1+\omega^2} + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$F(j\omega)F(-j\omega) = 2\pi\left[\frac{1}{1+\omega^2} + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Tomando en cuenta que $|a+b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2$, podemos plantear que;

$|F(j\omega)|^2 \leq |F_1(j\omega)|^2 + |F_2(j\omega)|^2$, y trabajamos con el mínimo.

$$F(j\omega)F(-j\omega) = 2\pi\left[\frac{1}{(1-j\omega)}\frac{1}{(1+j\omega)}\right] + 2\pi^2\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$F(j\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(1+j\omega)} + \pi\sqrt{2}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$F(-j\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(1-j\omega)} + \pi\sqrt{2}\left[\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$f(t) = \sqrt{2\pi}e^{-t}u(t) + \sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

c) Determine la potencia total de $f(t)$ en base a la función de autocorrelación.

Potencia total de $f(t) = R_f(0)$
$R_f(0) = \frac{1}{2} + 1$
$R_f(0) = 1{,}5$ watts

d) Determine la potencia total de $f(t)$ en base a la función de densidad espectral de potencia.
Potencia total de $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\, d\omega$
Potencia total de $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{1+\omega^2} + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)\right] d\omega$
Potencia total de $f(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\tan^{-1}(\omega)|_{-\infty}^{\infty} + \pi + \pi\right]$
Potencia total de $f(t) = 1{,}5$ watts

Problema 3.4 Sea la señal $x(t)$ una función muestra de un Proceso aleatorio estacionario en sentido amplio, real y con valor esperado positivo. También se conoce que la función de autocorrelación de $x(t)$ es $R_x(\tau) = \Lambda(\tau)$ la cual es periódica con $T_0 = 4$.

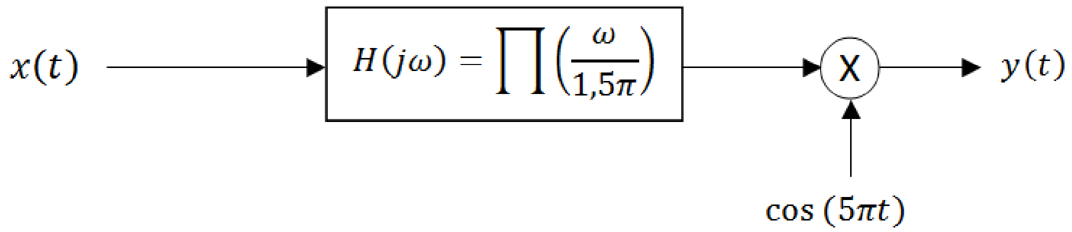


Figura 1

a) En función del sistema de la Figura 1, y realizando el análisis frecuencial determine la DEP y la función de autocorrelación de $y(t)$.

Dado que el sistema es LIT estable, y $x(t)$ pertenece a un proceso aleatorio WSS, podremos asumir que la señal $y(t)$ también será parte de un proceso WSS. La función de densidad espectral de potencia de $Y(t)$, $S_{yy}(\omega) = F\{R_{yy}(\tau)\}$

Calculamos la función de densidad espectral de potencia de la señal que se encuentra a la salida del filtro caracterizado por $H(j\omega)$ a la cual llamaremos $x_1(t)$.

$$S_{X_1}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega)$$

$$S_x(\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} sinc^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_{x_1}(\omega) = \prod\left(\frac{\omega}{1{,}5\pi}\right)S_x(\omega)$$

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=-1}^{1} sinc^2\left(k\frac{\pi}{4}\right)\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=-1}^{1} sinc^2\left(k\frac{\pi}{4}\right)\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[0{,}9\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \delta(\omega) + 0{,}9\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S_{x_1}(j\omega) * \frac{\pi^2}{2\pi}[\delta(\omega + 5\pi) + \delta(\omega - 5\pi)]\right]$$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{1}{4}[S_{x1}(\omega + 5\pi) + S_{x1}(\omega - 5\pi)]$$

$$S_y(\omega) = \frac{\pi}{8}\left[0{,}9\delta\left(\omega + 5\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \delta(\omega + 5\pi) + 0{,}9\delta\left(\omega + 5\pi - \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}9\delta\left(\omega - 5\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \delta(\omega - 5\pi) + 0{,}9\delta\left(\omega - 5\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

La función DEP de $Y(t)$;

$$S_y(\omega) = \frac{\pi}{8}\left[0{,}9\delta\left(\omega + \frac{11\pi}{2}\right) + \delta(\omega + 5\pi) + 0{,}9\delta\left(\omega + \frac{9\pi}{2}\right) + 0{,}9\delta\left(\omega - \frac{9\pi}{2}\right) + \delta(\omega - 5\pi) + 0{,}9\delta\left(\omega - \frac{11\pi}{2}\right)\right]$$

$$R_y(\tau) = F^{-1}\{S_{yy}(\omega)\}$$

La función de autocorrelación de $Y(t)$ será:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{8}\left[0{,}9cos\left(\frac{11\pi}{2}\tau\right) + cos(5\pi t) + 0{,}9cos\left(\frac{9\pi}{2}\tau\right)\right]$$

b) En función del sistema de la Figura 1, y realizando el análisis estadístico determine la DEP y la función de autocorrelación de $y(t)$.

La señal a la salida de sistema filtro pasa bajos $x_1(t)$, tiene función de autocorrelación $R_{x_1}(\tau)$.

$$R_{x_1}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

Donde $h(\tau)$ representa la respuesta al impulso de filtro pasa bajos evaluada en $t = \tau$.

$$h(t) = F^{-1}\left\{\prod\left(\frac{\omega}{1{,}5\pi}\right)\right\}$$

$$h(t) = 2\frac{sen(0{,}75\pi\tau)}{\pi\tau}$$

$$h(\tau) = 1{,}5sinc(0{,}75\pi\tau)$$

$$h(-\tau) = 1{,}5sinc(0{,}75\pi\tau)$$

$$R_{x1}(\tau) = R_x(\tau) * 1{,}5sinc(0{,}75\pi\tau) * 1{,}5sinc(0{,}75\pi\tau)$$

$$S_{x1}(\omega) = F\{R_x(\tau)\}F\{1{,}5sinc(0{,}75\pi\tau)\}F\{1{,}5sinc(0{,}75\pi\tau)\}$$

$$S_{x1}(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[0{,}9\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \delta(\omega) + 0{,}9\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$R_{x1}(\tau) = F^{-1}\{S_{x1}(\omega)\}$$

$$R_{x1}(\tau) = 0{,}45cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) + \frac{1}{4}$$

$$R_y(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$Y(t) = X_1(t)\cos(5\pi t)$$

$$R_y(\tau) = E[X_1(t)\cos(5\pi t)X_1(t+\tau)\cos(5\pi(t+\tau))]$$

$$R_y(\tau) = E[X_1(t)X_1(t+\tau)\cos(5\pi t)\cos(5\pi(t+\tau))]$$

En este punto podemos asumir independencia estadística entre $X_1(t)$ y $\cos(5\pi t)$.

$$R_y(\tau) = E[X_1(t)X_1(t+\tau)]E[\cos(5\pi t)\cos(5\pi(t+\tau))]$$
$$R_y(\tau) = E[X_1(t)X_1(t+\tau)]\frac{\cos(5\pi\tau)}{2}$$
$$R_y(\tau) = \left(0{,}45cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) + \frac{1}{4}\right)\frac{\cos(5\pi\tau)}{2}$$
$$R_y(\tau) = \frac{1}{2}\left(0{,}45cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)\cos(5\pi\tau) + \frac{1}{4}\cos(5\pi\tau)\right)$$
$$R_y(\tau) = \frac{1}{4}\left(0{,}45\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\tau + 5\pi\tau\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau - 5\pi\tau\right)\right) + \frac{1}{2}\cos(5\pi\tau)\right)$$
$$R_y(\tau) = \frac{1}{4}\left(0{,}45\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\tau + 5\pi\tau\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau - 5\pi\tau\right)\right) + \frac{1}{2}\cos(5\pi\tau)\right)$$
$$R_y(\tau) = \frac{1}{8}\left[0{,}9cos\left(\frac{11\pi}{2}\tau\right) + cos(5\pi t) + 0{,}9cos\left(\frac{9\pi}{2}\tau\right)\right]$$

Al aplicar transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación obtendremos la DEP de $y(t)$.

$$S_y(\omega) = \frac{\pi}{8}\left[0{,}9\delta\left(\omega + \frac{11\pi}{2}\right) + \delta(\omega + 5\pi) + 0{,}9\delta\left(\omega + \frac{9\pi}{2}\right) + 0{,}9\delta\left(\omega - \frac{9\pi}{2}\right) + \delta(\omega - 5\pi) + 0{,}9\delta\left(\omega - \frac{11\pi}{2}\right)\right]$$

c) Determine la media $E[Y(t)]$ y la varianza σ_Y^2 de $y(t)$.

En este punto debemos asumir que $x(t)$ es ergódico, ya que en el enunciado indican que $x(t)$ una función muestra de un Proceso Aleatorio y la única forma de que una función muestra caracterice el comportamiento del todo el P.A. es si este es ergódico. La media de $Y(t)$, $E^2[Y(t)] = 0$ esto se debe a que no existen deltas en el origen de la función DEP $S_y(\omega)$.
Por lo que la varianza de $Y(t)$, $\sigma_Y^2 = E[Y^2(t)] - E^2[Y(t)]$

$$\sigma_Y^2 = R_y(0) - E^2[Y(t)]$$
$$\sigma_Y^2 = R_y(0)$$
$$R_y(0) = \frac{1}{8}[0{,}9 + 1 + 0{,}9]$$
$$R_y(0) = 0{,}35\,watts$$

Problema 3.5 Se tiene un proceso aleatorio y Gausseano $M(t)$, el cual es WSS de media nula y función de densidad espectral de potencia $S_M(\omega)$ tal como se muestra en la Figura 2. A partir de $M(t)$ se construye otro proceso aleatorio $X(t) = M(t)\cos(\omega_c t) + \widehat{M}(t)\,\mathrm{sen}(\omega_c t)$, donde $\widehat{M}(t)$ representa la transformada de Hilbert de $M(t)$.

Nota: Para la solución asuma lo siguiente:

- $\omega_c \gg \omega_0$
- $E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right] = -E\left[\widehat{M}(t)M(t+\tau)\right]$

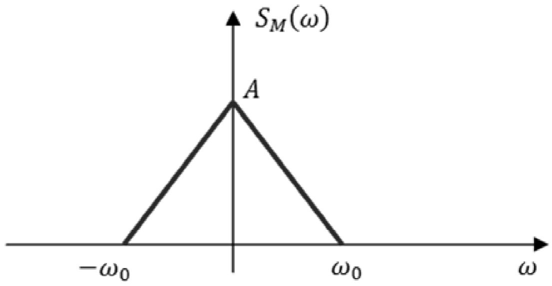


Figura2

a) Determine si el proceso aleatorio $X(t)$ es WSS.

Para verificar la Estacionaridad del P.A. debemos calcular su valor esperado $E[X(t)]$ y su función de autocorrelación $E[X(t)X(t+\tau)]$.

$E[X(t)] = E\left[M(t)cos(\omega_c t) - \widehat{M}(t)sen(\omega_c t)\right]$
$E[X(t)] = E[M(t)]cos(\omega_c t) - E\left[\widehat{M}(t)\right]sen(\omega_c t)$
Dado que $E[M(t)] = 0$, $E\left[\widehat{M}(t)\right] = 0$ por lo que;
$E[X(t)] = 0$

$E[X(t)X(t+\tau)] = E\left[(M(t)cos(\omega_c t) - \widehat{M}(t)sen(\omega_c t))(M(t+\tau)cos(\omega_c(t+\tau)) - \widehat{M}(t+\tau)sen(\omega_c(t+\tau)))\right]$

$E[X(t)X(t+\tau)] = E[M(t)M(t+\tau)cos(\omega_c t)cos(\omega_c(t+\tau))] + E\left[\widehat{M}(t)\widehat{M}(t+\tau)sen(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau))\right] - E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)cos(\omega_c t)sen\left(\omega_c(t+\tau)\right)\right] - E\left[M(t+\tau)\widehat{M}(t)cos(\omega_c(t+\tau))sen(\omega_c t)\right]$

Ahora utilizaremos los datos proporcionados en el enunciado para simplificar algunos términos de la ecuación correspondiente a la autocorrelación de $X(t)$.

- Si $M(t)$ es WSS, $\widehat{M}(t)$ tambien lo será, ya que el transformador de Hilbert puede ser considerado como un sistema LIT.
- $S_M(j\omega) = S_{\widehat{M}}(j\omega)$, en base a las propiedades de la transformada de Hilbert.
- $R_M(\tau)$=$R_{\widehat{M}}(\tau)$,en base a las propiedades de la transformada de Hilbert.

$R_X(\tau) = E[M(t)M(t+\tau)]cos(\omega_c t)cos(\omega_c(t+\tau)) + E\left[\widehat{M}(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]sen(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau)) - E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]cos(\omega_c t)sen\left(\omega_c(t+\tau)\right) - E\left[M(t+\tau)\widehat{M}(t)\right]cos(\omega_c(t+\tau))sen(\omega_c t)$

$R_X(\tau) = R_M(\tau)cos(\omega_c t)cos(\omega_c(t+\tau)) + R_{\widehat{M}}(\tau)sen(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau)) - E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]cos(\omega_c t)sen\left(\omega_c(t+\tau)\right) - E\left[M(t+\tau)\widehat{M}(t)\right]cos(\omega_c(t+\tau))sen(\omega_c t)$

$R_X(\tau) = R_M(\tau)[cos(\omega_c t)cos(\omega_c(t+\tau)) + sen(\omega_c t)sen(\omega_c(t+\tau))] - E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]\frac{1}{2}\left[sen(\omega_c\tau) + sen\left(\omega_c(t+\tau)\right)\right] - E\left[M(t+\tau)\widehat{M}(t)\right]\frac{1}{2}\left[sen(-\omega_c\tau) + sen\left(\omega_c(t+\tau)\right)\right]$

Como dato nos indican que $E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]=-E\left[M(t+\tau)\widehat{M}(t)\right]$, lo cual puede ser demostrado de la siguiente forma:

- $E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]=E[M(t)M(t+\tau)]*\left(\frac{1}{\pi(-\tau)}\right)$
  $=R_M(\tau)*-\frac{1}{\pi\tau}$
- $E\left[\widehat{M}(t)M(t+\tau)\right]=E[M(t)M(t+\tau)]*\left(\frac{1}{\pi(\tau)}\right)$
  $=R_M(\tau)*\left(\frac{1}{\pi\tau}\right)$
- $E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]=-E\left[\widehat{M}(t)M(t+\tau)\right]$

Sustituyendo en la expresión de autocorrelación de $X(t)$, obtendremos:

$$R_X(\tau)=R_M(\tau)cos(\omega_c\tau)-E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]\frac{1}{2}\left[sen(\omega_c\tau)+sen\big(\omega_c(t+\tau)\big)\right]+E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]\frac{1}{2}\left[-sen(\omega_c\tau)+sen\big(\omega_c(t+\tau)\big)\right]$$

$$R_X(\tau)=R_M(\tau)cos(\omega_c\tau)-E\left[M(t)\widehat{M}(t+\tau)\right]sen(\omega_c\tau)$$

$$R_X(\tau)=R_M(\tau)cos(\omega_c\tau)+R_M(\tau)sen(\omega_c\tau)*\left(\frac{1}{\pi(\tau)}\right)$$

Dado que el valor esperado de $X(t)$ es constante y su función de autocorrelación solo depende de τ podemos afirmar que el P. A. es WSS.

b) Determine la función de autocorrelación de $X(t)$.
Es la misma expresión que calculamos en (a) $R_X(\tau)=R_M(\tau)cos(\omega_c\tau)+R_M(\tau)sen(\omega_c\tau)*\left(\frac{1}{\pi(\tau)}\right)$.

c) Determine la función de densidad espectral de potencia de $X(t)$.

Al aplicar Transformada de Fourier a la expresión de autocorrelación de $X(t)$ obtendremos su función DEP.

$$S_X(\omega)=F\{R_X(\tau)\}$$

$$S_X(\omega)=F\left\{R_M(\tau)cos(\omega_c\tau)+R_M(\tau)sen(\omega_c\tau)*\left(\frac{1}{\pi(\tau)}\right)\right\}$$

$$S_X(\omega)=\frac{S_M(j\omega)}{2\pi}*\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]-\ jsgn(\omega)\frac{S_M(j\omega)}{2\pi}*\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]$$

$$S_X(\omega)=\frac{S_M(j\omega)}{2}*[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]-sgn(\omega)\frac{S_M(j\omega)}{2}*[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]$$

$$S_X(\omega)=\frac{1}{2}[S_M(\omega-\omega_c)+S_M(\omega+\omega_c)]-sgn(\omega)\frac{S_M(j\omega)}{2}*[\delta(\omega-\omega_c)-\delta(\omega+\omega_c)]$$

d) Determine las expresiones de la Envolvente y la Fase de $X(t)$ en función de $M(t)$.

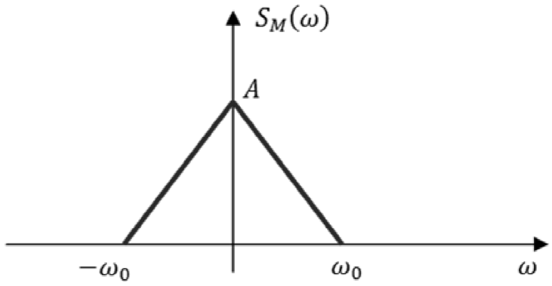
$$X(t)=M(t)\cos(\omega_c t)+\widehat{M}(t)\operatorname{sen}(\omega_c t)$$

$$V(t)=\sqrt{\big(M(t)\big)^2+\left(\widehat{-M}(t)\right)^2}$$

$\varphi(t) = -\tan^{-1}\left(\frac{\hat{M}(t)}{M(t)}\right)$

e) Determine la potencia de $X(t)$, si se conoce que la potencia de $M(t)$ es de 1watt.

Para determinar la potencia de $X(t)$ debemos graficar su función de DEP, determinar el área bajo la curva y escalarla por $\frac{1}{2\pi}$. Lo anterior lo podemos realizar a partir de la DEP de $M(t)$ que proporcionan como dato en el enunciado.



$$S_X(\omega) = \frac{1}{2}[S_M(\omega - \omega_c) + S_M(\omega + \omega_c)] - sgn(\omega)\frac{S_M(j\omega)}{2} * [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$$

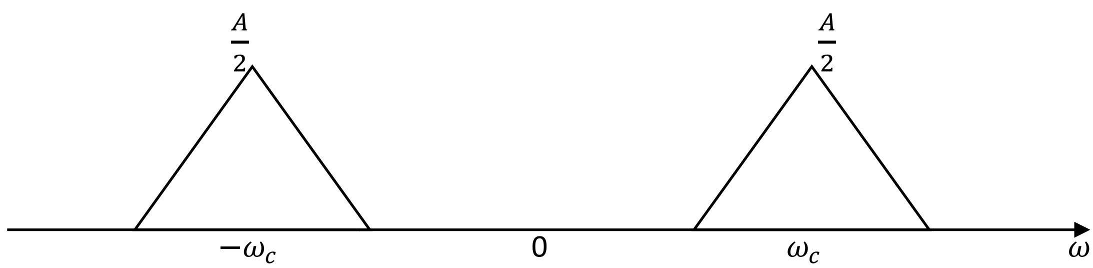
Separamos la expresión en dos partes para facilitar el análisis;

$S_X(\omega) = S_{X_1}(\omega) + S_{X_2}(\omega)$

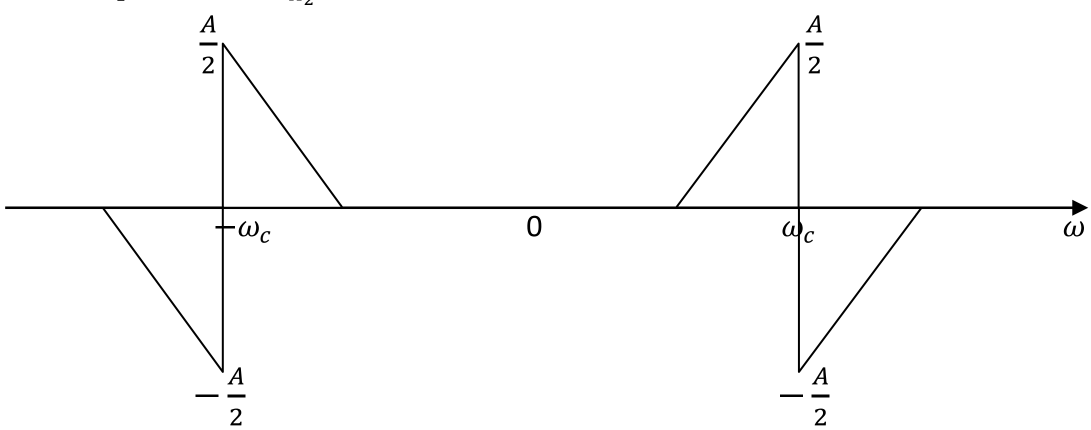
$S_{X_1}(\omega) = \frac{1}{2}[S_M(\omega - \omega_c) + S_M(\omega + \omega_c)]$

$S_{X_2}(\omega) = -sgn(\omega)\frac{S_M(j\omega)}{2} * [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$

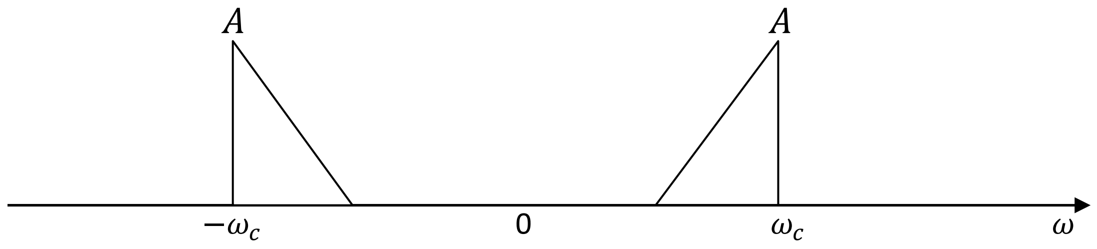
La gráfica correspondiente a $S_{X_1}(\omega)$ sería;



La gráfica correspondiente a $S_{X_2}(\omega)$ sería;



Al combinar ambas graficas obtendremos;



Por lo que la potencia de $X(t)$ será igual a la potencia de $M(t)$, ya que el área bajo ambas curvas es igual a 1watt.